ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑRTΗ 18 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Έως και το Θ. Bolzano

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α2. Πότε μία συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to R$ λέγεται 1 – 1; **Μονάδες 4**

Α3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. **Μονάδες 4**

Α4. Θεωρήστε τον ισχυρισμό «Έστω f, g δύο συναρτήσεις τέτοιες ώστε να ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof. Τότε ισχύει $fog = gof$ »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδα 1

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 2

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) :

α. Αν η συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to R$ είναι γνησίως μονότονη, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

β. Αν f και g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται αν και μόνο αν $f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B} \neq \varnothing$.

γ. Αν μία συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to R$ είναι 1 – 1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει

$$f^{-1}\left(f\left(y\right)\right)=y\ ,\ y\in f\left(\mathrm{A}\right)\ \text{ και }\ f\left(f^{-1}\left(x\right)\right)=x\ ,\ x\in \mathrm{A}$$

δ. Μία συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to R$ είναι 1 – 1 αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

ε. Αν f,g,h τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho\left(gof\right)$, τότε ορίζεται και η $\left(hog\right)of$ και ισχύει $ho\left(gof\right)=\left(hog\right)of$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$h(x)=\ln x-\frac{1}{x}+3\ ,\ \text{με }\ x>0\ \text{ και }\ h\left(R\right)=R$$

Β1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση h είναι αντιστρέψιμη και, στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση

$$h\left(h^{-1}\left(x\right)+\frac{2}{3}\right)<2$$

Μονάδες 6

Β2. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της h^{-1} τέμνει την ευθεία $\varepsilon: y=x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in\left(\frac{1}{3},1\right)$.

Μονάδες 5

Β3. Αν $\varphi\left(x\right)=\dfrac{1}{x-2}$, $x\neq 2$, τότε:

α. να ορίσετε τη σύνθεση φoh . **Μονάδες 7**

β. να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to 1}\left(\varphi oh\right)\left(x\right)$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι :

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x)-1}{x-1}=2$
- $f(0)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2\sigma\upsilon\nu\left(f(x)-1\right)-2}{1-f(x)}$
- $g(x)=e^{\frac{f(x)}{x-2}}-\ln(x-2)$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(2)=1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|f(x)+3|}{1-|f^2(x)-2f(x)|}$ **Μονάδες 4**

Γ3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 2}g(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g^3(x)-2g^2(x)+5}{g^4(x)-g^3(x)+6}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{4g^2(x)-g(x)+1}-2g(x)\right)$

Μονάδες 9

Γ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να λύσετε την εξίσωση:

$$f(\eta\mu x)-f(x)=f(x+1)-f(\eta\mu x+1) \quad , \text{στο } \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : R \to R$ για τις οποίες ισχύει ότι :

- $(g \circ f)(x) = e^{x+1} + f(x)$, για κάθε $x \in R$
- $g(R) = [1, +\infty)$
- $x \cdot f(x) \le \sqrt{x^2 + 9} - 3$, για κάθε $x \in R$
- $g(1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2ex + 6} - \lambda x \right)$, $\lambda \in R$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι 1 – 1 και, στη συνέχεια, να λύσετε την εξίσωση

$$f(e^x + x^3) - f(-x+1) = 0$$ **Μονάδες 6**

Δ2. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

Μονάδες 5

Δ3. Να δείξετε ότι λ = 1 και στη συνέχεια, να δείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι 1 – 1.

Μονάδες 7

Δ4. Αν είναι γνωστό ότι η εξίσωση $g(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα το 0, να λύσετε την ανίσωση

$$g(f(|x| - 1)) \le -g(f(x^2 - 3x + 2)) + 2$$

Μονάδες 7

Σας ευχόμαστε επιτυχία…. μα πάνω απ' όλα υγεία!

<u>Επιμέλεια</u>

Μπατζίνας Νέστορας